به نام خدا

مفهوم مشتق و انتگرال

منبع:

حساب دیفرانسیل و انتگرال با هندسه ی تحلیلی (جلد اول)؛

ریچارد. ا. سیلورمن؛ ترجمه: علی اکبر عالم زاده

نگارنده:

مهدی عباسیان مطلق

www.Khorshidvash.com

۱۳۸۸

۱. درآمد

مشتق و انتگرال دو ابزار اساسی برای علوم پایه، به‌ویژه فیزیک، و علوم مهندسی به شمار می‌آیند. در بررسی و به کار بستن این دو ابزار، با دو شاخه‌ی متفاوت سروکار داریم: (۱) درک مفهوم مشتق و انتگرال، و (۲) روش‌های مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری؛ و مقصود من از نگاشتن این نوشتار دست یافتن به درکی بنیادین از موضوع است.

در این نوشتار هر جا که لازم بوده است به جای بحث کلی، مثال‌ها را در نظر گرفتم. همچنین در برخی از بخش‌ها دقیق عمل نکرده‌ام تا به سادگی مطلب آسیبی نرسد.

۲) مشتق

برای بررسی مشتق، موضوع را از تعریف آن آغاز می‌کنیم. توجه کنید که این گزینش از آن روی انجام شد که مشتق را به عنوان موجودی مستقل بپذیریم و نه نتیجه‌ای از یک تجربه! حتی اگر این بیان دقیق نباشد در هدفی که دنبال می‌کنیم خللی وارد نمی‌کند.

۲-۱) تعریف مشتق

تعریف مشتق عبارت است از

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \qquad (۱)$$

که در آن از ابزار حد استفاده شده است. تک‌تک اجزای این رابطه را معرفی می‌کنیم.

(آ) f: تابعی است که دارای خروجی‌هایی مجاز است؛

(ب) x: متغیر مستقلی است که تابع f به ازای هر مقداری از آن، خروجی‌های مجاز نامبرده در بند (آ) را ارائه می‌دهد؛

(پ) Δx: مقدار تغییرات (دگرگونی‌های) متغیر مستقل نسبت به x اولیه؛

(ت) f(x): مقدار تابع f در x؛

(ج) f(x+ Δx): مقدار تابع f در x+ Δx؛

(چ) f'(x): مشتق تابع f در نقطه‌ی x.

۲-۲) هسته‌ی مشتق

در نخستین گام، عبارت

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \qquad (۲)$$

را تحلیل می‌کنیم. در این نوشتار، این عبارت را با نام «هسته‌ی مشتق» می‌شناسیم و می‌توان آن را به صورت

$$\frac{f(u)-f(x)}{u-x} \qquad (۳)$$

هم نوشت. در رابطه‌ی (۳)، u=x+Δx و در نتیجه u-x=Δx است. همان‌طور که می‌بینید، هسته‌ی مشتق از «کسر تغییرات تابع f نسبت به تغییرات متغیر مستقل x» تشکیل یافته است.

جعبه‌ای خالی را در نظر بگیرید که بر روی یک ترازو قرار دارد. ترازو وزن این جعبه را نشان می‌دهد. فرض کنید که تعداد زیادی سیب در اختیار شما قرار داده شده است و از شما خواسته‌اند که این سیب‌ها را در جعبه قرار دهید و شخص دیگری هم‌زمان وزنی که ترازو نشان می‌دهد هر ۲ ثانیه یک بار ثبت کند و جدولی همانند جدول (۱) را تهیه کند. انتخاب بازه‌ی ۲ ثانیه‌ای به دلخواه انجام شده است؛ حتی می‌توان بازه‌ها را نامساوی برگزید.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
وزن	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۳	۱۳	۱۴	۱۶	۱۷
زمان	۰	۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶

جدول (۱)

در این نمونه، زمان را x (متغیر مستقل) در نظر بگیرید، و وزنی که جعبه نشان می‌دهد تابعی است که با گذر زمان تغییر می‌کند (f(x)). حال اگر کسر دگرگونی‌های وزن جعبه نسبت به زمان را برای بازه‌های زمانی [a,b]،[b,c]،[c,d]،[d,e]،[e,f]، [f,g]،[g,h]،[h,i]، و [a,i] بنویسیم خواهیم داشت:

$$\frac{f_b-f_a}{x_b-x_a}=\frac{۱۱-۱۰}{۲-۰}=\frac{۱}{۲} \qquad \frac{f_c-f_b}{x_c-x_b}=\frac{۱۲-۱۱}{۴-۲}=\frac{۱}{۲} \qquad \frac{f_d-f_c}{x_d-x_c}=\frac{۱۳-۱۲}{۶-۴}=\frac{۱}{۲}$$

$$\frac{f_e-f_d}{x_e-x_d}=\frac{۱۳-۱۳}{۸-۶}=۰ \qquad \frac{f_f-f_e}{x_f-x_e}=\frac{۱۳-۱۳}{۱۰-۸}=۰ \qquad \frac{f_g-f_f}{x_g-x_f}=\frac{۱۴-۱۳}{۱۲-۱۰}=\frac{۱}{۲}$$

$$\frac{f_h-f_g}{x_h-x_g}=\frac{۱۶-۱۴}{۱۴-۱۲}=۱ \qquad \frac{f_i-f_h}{x_i-x_h}=\frac{۱۷-۱۶}{۱۶-۱۴}=\frac{۱}{۲} \qquad \frac{f_i-f_a}{x_i-x_a}=\frac{۱۷-۱۰}{۱۶-۰}=\frac{۷}{۱۶}=۰٫۴۳۷۵$$

(۴)

در عملیات آخر، دگرگونی متغیر مستقل x در بازه‌ی کلی فرایند در نظر گرفته شده است. همان‌طور که می‌بینید، مقدار ۰٫۵ در بیشتر کسرها حاکم است؛ پس دور از ذهن نیست که مقدار ۰٫۴۳۷۵ به دست آمده برای بازه‌ی کلی به این مقدار ۰٫۵ نزدیک باشد. در این نمونه، «تغییرات وزن نسبت به تغییرات زمان بیانگر مشتق تابع وزن نسبت به زمان است».

حدگیری مطرح شده در رابطه‌ی (۱) موجب می‌شود که در خروجی‌های مشتق نوعی «دقت» لحاظ شود، که البته این اعمال دقت بخشی از تعریف خود مشتق است! در واقع، چون مشتق تابع در Δx های کوچک‌تر برای ما مهم‌تر هستند این حد را اعمال می‌کنیم و میانگین‌ها، مانند ۰٫۴۳۷۵ در این مثال، از اهمیت کمتری برخوردارند. برای نمونه، در این مثال، «میانگین بازه‌ی کلی» اقتضا می‌کند که در بازه‌ی x=۶ تا x=۱۰، مقدار مشتق وزن

تقریبا برابر با ۰,۴۳۷۵ باشد اما در اندازه‌گیری‌های دقیق‌تر ۲ ثانیه‌ای مقدار دقیق‌تر صفر برای مشتق وزن در این بازه به دست آمده است.

با بررسی این مثال به این نکته دست می‌یابیم که «**مشتق، در واقع، شدت تغییرات را بیان می‌کند؛ هر چه تغییرات تابع نسبت به دگرگونی‌های متغیر مستقلش بیشتر باشد، مشتقش بزرگ‌تر است**». این شدت تغییرات می‌تواند شدت خروج گاز از یک محفظه، شدت تغییرات وزن (نمونه‌ای که هم‌اکنون آن را بررسی کردیم)، سرعت (شدت تغییرات مکان)، و ... باشد.

۲-۳) نمادگذاری‌های مشتق

مشتق را با این سه نماد نشان می‌دهیم:

$$\frac{df}{dx} \quad , \quad \dot{x} \quad , \quad f' \qquad (۵)$$

که البته f' مرسوم‌تر و df/dx ساده‌تر و منعطف‌تر است. df/dx را می‌توان از طرف راست معادله‌ی (۱)، با این فرض که d فشرده‌شده‌ی Δ است و Δf=f(x+ Δx)-f(x)، به دست آورد. عمل حدگیری، فشرده شدن Δ را تضمین می‌کند.

۲-۴) تعبیر فیزیکی مشتق

موضوعی که گهگاه در فهم مشتق ایجاد ابهام می‌کند «تعبیر فیزیکی» مشتق تابع مورد نظر است. تابع مکان جسم را در نظر بگیرید؛ شاید از خود پرسیده باشید که چرا «مشتق مکان نسبت به زمان» را به «سرعت» تعبیر می‌کنیم و این تعبیر فیزیکی از کجا ناشی می‌شود. در پاسخ می‌توان گفت که **تعریف فیزیکی** سرعت به گونه‌ای است که هم‌ارز «مشتق مکان نسبت به زمان» است. این «سرعت» است که با شدت تغییرات مکان متناسب است و همان‌طور که گفته شد مشتق هم شدت تغییرات هر کمیتی است. بیان ریاضیاتی این توضیح، رابطه‌ی مشهور سرعت جسم است:

$$v = \frac{dx}{dt} \qquad (۶)$$

که در آن dx/dt شدت تغییرات مکان (در گذر زمان) است – مشتق مکان نسبت به زمان.

نمونه‌ی دیگر، شتاب جسم است که تعریف آن به گونه‌ای است که از مشتق سرعت حاصل می‌شود. شتاب جسم هم‌ارز با شدت تغییرات سرعت جسم (در گذر زمان) است – مشتق سرعت نسبت به زمان یا a=dv/dt؛ از آنجا که خود سرعت از مشتق مکان نسبت به زمان به دست آمده است شتاب را مشتق دوم مکان نسبت به زمان می‌نامیم.

۳. انتگرال

موضوع انتگرال را از مبحث مشتق شروع می‌کنیم. رابطه‌ی (۱) را به یاد بیاورید:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$$

در این بخش هم تمرکز خود را بر روی هسته‌ی مشتق قرار می‌دهیم، یعنی

$$f'(x)\simeq\frac{\Delta f}{\Delta x} \qquad (۷)$$

برای درک بهتر موضوع، به دلیل آن که خواننده با مکان جسم (X) و سرعتش (V) به‌خوبی آشناست، از رابطه‌ی زیر به جای رابطه‌ی (۷) استفاده می‌کنیم.

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (۸)$$

دقت کنید که شباهت ظاهری Δx در صورت (۸) با Δx در مخرج (۷) شما را به اشتباه نیاندازد. در واقع، x در صورت (۸) مفهوم $x=x(t)$ را دارد که هم‌ارز $f=f(x)$ در صورت کسر (۷) است.

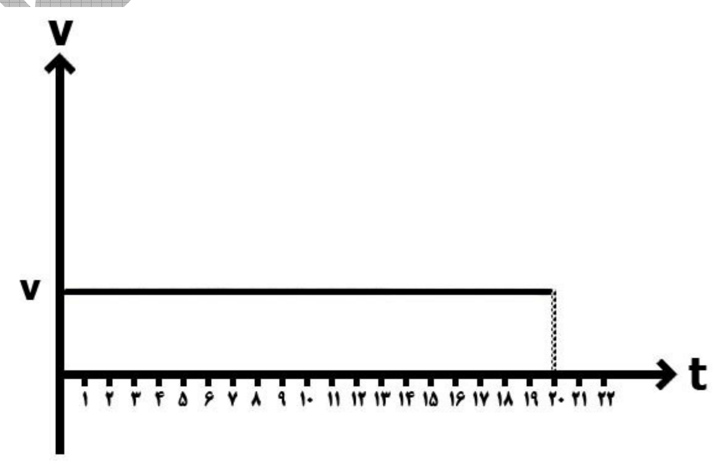
در این مرحله، باز هم برای ساده‌تر شدن موضوع، حالتی را در نظر می‌گیریم که سرعت ثابت باشد ($v=const$). رابطه‌ی (۸) را به این صورت بازنویسی می‌کنیم:

$$v\,\Delta t=\Delta x \qquad (۹)$$

به ازای بازه‌های زمانی مختلف می‌توان چنین جدول و نموداری را ترتیب داد.

با فرض $t_o=۰$ است و $\Delta t=t-t_o$	Δx	۰	۲V	۴V	۶V	۸V	۱۰V	۱۲V	۱۴V	۱۶V	۱۸V	۲۰V
	Δt	۰	۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰

جدول (۲)

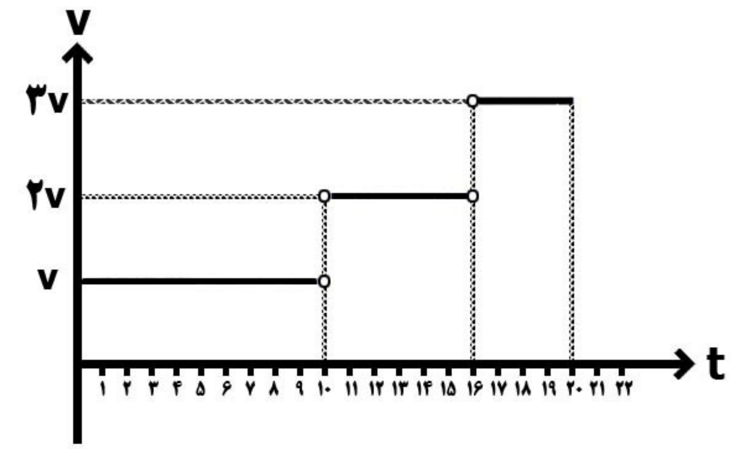


نمودار (۱)

در مرحله‌ی دوم فرض می‌کنیم که V در رابطه‌ی (۹) از ۰ تا ۱۰ ثانیه مقدار V، از ۱۰ تا ۱۶ ثانیه مقدار **۲V** و از ۱۶ تا ۲۰ ثانیه مقدار **۳V** داشته باشد. در این صورت

با فرض $t_o=۰$ و $\Delta t=t-t_o$ است												
	Δx	۰	۲V	۴V	۶V	۸V	۱۰V	۱۰V+ ۲×۲V	۱۰V+ ۴×۲V	۱۰V+ ۶×۲V	۱۰V+ ۶×۲V+ ۲×۳V	۱۰V+ ۶×۲V+ ۴×۳V
	Δt	۰	۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰

جدول (۳)



نمودار (۲)

از بررسی این دو جفت جدول و نمودار به دو نکته‌ی اساسی دست می‌یابیم:

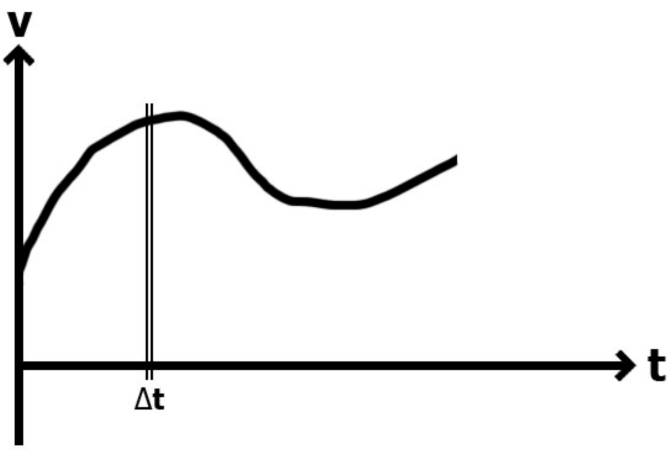
(۱) از حاصل‌ضرب هر بازه‌ی زمانی در سرعت مربوطه‌اش جابه‌جایی در آن بازه‌ی زمانی به دست می‌آید – vΔt=Δx، به گونه‌ای که اگر در یک بازه‌ی زمانی به اندازه‌ی کافی بزرگ، سرعت ثابت نباشد، Δx کل برابر است با «مجموع حاصل‌ضرب Δt ها در V ی مربوط به هر کدام که V در هر یک از آنها ثابت است»، یعنی

$$\Delta x_T = v_۱(\Delta t)_۱ + v_۲(\Delta t)_۲ + \ldots + v_i(\Delta t)_i \quad \rightarrow \quad \Delta x_T = \sum_i v_i(\Delta t)_i \qquad (۱۰)$$

این گزاره را هسته‌ی انتگرال می‌نامیم؛ آن را با هسته‌ی مشتق مقایسه کنید.

(۲) با مقایسه‌ی هر نمودار با جدول مربوطه‌اش در می‌یابیم که vΔt ها، و در نتیجه Δx ها، هم‌ارز با مساحت زیر منحنی V هستند. این گزاره همان تصوری است که بسیاری از ما تا مدت‌ها از «ذات انتگرال» در ذهن خود داریم، در حالی که این گزاره تنها یک برداشت ظاهری از انتگرال است.

اینک به مرحله‌ای رسیده‌ایم که بتوانیم Δx مربوط به یک نمودار بی‌هنجار، مانند این نمودار، را بیابیم.



نمودار (۳)

درست است که v تقریبا در هیچ زمانی مقدار ثابتی ندارد ولی اگر بتوان بازه‌های Δt را بسیار کوچک کرد، به این مقصود می‌رسیم. اینجاست که لزوم به‌کارگیری مفهوم حد در تعریف انتگرال آشکار می‌شود.

$$\Delta x_T = \lim_{i\to\infty}\sum_i v_i(\Delta t)_i \quad \text{یا} \quad \Delta x_T = \lim_{\Delta t\to 0}\sum_i v_i(\Delta t)_i \qquad (۱۱)$$

چون Δt ها بسیار کوچک هستند می‌توان همه را یک‌اندازه و برابر با مقدار dt در نظر گرفت که در آن d را Δ ی بسیار کوچک در نظر می‌گیریم و نام دیفرانسیل را بر آن می‌گذاریم. زیرنویس i را از v برمی‌داریم با این شرط که مطمئن باشیم می‌توانیم هر v را به dt مربوطه‌اش ارتباط می‌دهیم. با این توضیح رابطه‌ی ۱۱ به این صورت بازنویسی می‌شود.

$$\Delta x_T = \int v\,dt \qquad (۱۲)$$

که در آن نماد ∫ را به جای Σ به کار برده‌ایم و معنایشان تقریبا یکسان است. به جای Δx_T نمادهای S، A، و یا X هم به کار می‌رود. رابطه‌ی (۱۲) را برای مورد خاص سرعت و تغییر مکان به دست آوردیم و می‌توان رابطه‌ی کلی را اینگونه نوشت:

$$A = \int F(x)\,dx \qquad (۱۳)$$

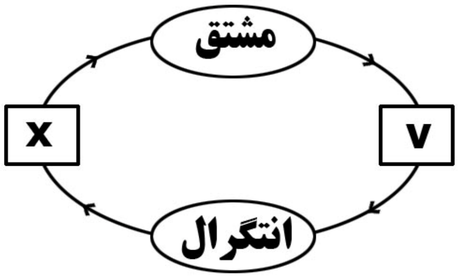
که در آن F(x) مشتق تابع f(x) است.

۳-۱) رابطه‌ی مشتق و انتگرال

نخستین نتیجه‌ای که از مقایسه‌ی رابطه‌ی (۱۲) و v=dx/dt می‌گیریم این جمله‌ی معروف است: «انتگرال معکوس مشتق است».

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \text{و} \quad x = \int v\,dt \qquad :$$

«با مشتق گرفتن از X به V می‌رسیم و با انتگرال گرفتن از V به X می‌رسیم»، یعنی



۳-۲) نتیجه‌ی مبحث انتگرال

نتیجه‌ی بحث این که انتگرال یعنی «مجموع حاصل‌ضرب همه‌ی مقادیر موردنظر تابع در بازه‌ی کوچکی از دگرگونی‌های متغیر مستقل مربوط به هر مقدار تابع، به شرط آن که مقدار تابع در بازه‌ی مربوطه‌اش ثابت باشد».

درباره‌ی «تعبیر فیزیکی» انتگرال هر تابع به استدلال مطرح شده برای تعبیر فیزیکی مشتق مراجعه کنید.

محاسبه‌ی انتگرال «تغییرات وزن جعبه نسبت به تغییر زمان» که از نمونه‌ی اول به دست آمد آموزنده است. تنها مورد اول و آخر را بررسی می‌کنیم:

$$\frac{f_i - f_a}{x_i - x_a} = \frac{17-10}{16-0} = \frac{7}{16} = 0{,}4375 \qquad \frac{f_b - f_a}{x_b - x_a} = \frac{11-10}{2-0} = \frac{1}{2} \qquad (14)$$

کسر $\Delta f/\Delta x$ هسته‌ی مشتق است و می‌توان آن را تقریبا برابر با خود مشتق در نظر گرفت؛ در نتیجه

$F_{ab}(x) = f'_{ab}(x) = 0{,}5$ که در آن $dx \approx \Delta x = 2$ است.

$F_{ai}(x) = f'_{ai}(x) = 0{,}4375$ که در آن $dx \approx \Delta x = 16$ است.

با توجه به رابطه‌ی (۱۳)، $A = \int F(x)dx$، یا هم‌ارز تقریبی آن، $A = \sum F_i(\Delta x)_i$، داریم

$$A_{ab} = f_b - f_a = \sum_{1} F_1(\Delta x)_1 = F_{ab} \times (\Delta x)_{ab} = 0{,}5 \times 2 = 1$$

(تغییر وزن جعبه در مدت ۲ ثانیه‌ی ab)

$$A_{ai} = f_i - f_a = \sum_{1} F_1(\Delta x)_1 = F_{ai} \times (\Delta x)_{ai} = 0{,}4375 \times 16 = 7$$

(تغییر وزن جعبه در مدت ۱۶ ثانیه‌ی کل)

که با مقدار Δf های رابطه‌های (۱۴) هم‌خوانی دارد و باید می‌داشت! A_{ai} را می‌توانستیم با جمع کردن حاصل‌ضرب همه‌ی بازه‌های ۲ ثانیه‌ای هم به دست آوریم – رابطه‌ی (۱۰):

$$A_{ai} = f_i - f_a = \sum_{i} F_i(\Delta x)_i = \frac{1}{2}\times 2 + \frac{1}{2}\times 2 + \frac{1}{2}\times 2 + 0\times 2 + 0\times 2 + \frac{1}{2}\times 2 + 1\times 2 + \frac{1}{2}\times 2 = 7$$

۴. چکیده و فرجام

مشتق، شدت تغییرات را بیان می‌کند؛ هر چه تغییرات تابع نسبت به دگرگونی‌های متغیر مستقلش بیشتر باشد، مشتقش بزرگ‌تر است. «تعبیر فیزیکی» مشتق، F(x)، هر تابع از **تعریف فیزیکی** آن F(x) ناشی می‌شود؛ برای نمونه «سرعت» با شدت تغییرات مکان متناسب است و چون «مشتق شدت تغییرات هر کمیتی است» پس مشتق مکان نسبت به زمان بیانگر سرعت خواهد بود.

انتگرال یعنی مجموع حاصل‌ضرب همه‌ی مقادیر موردنظر تابع در بازه‌ی کوچکی از دگرگونی‌های متغیر مستقل مربوط به هر مقدار تابع، به شرط آن که مقدار تابع در بازه‌ی مربوطه‌اش ثابت باشد. انتگرال هر تابع F(x) هم‌ارز با مساحت زیر منحنی F-x ی آن تابع است. این گزاره همان تصوری است که بسیاری از ما تا مدت‌ها از «ذات انتگرال» در ذهن خود داریم، در حالی که تنها یک برداشت ظاهری از انتگرال است.

انتگرال معکوس مشتق است. برای نمونه، با مشتق گرفتن از x به v می‌رسیم و با انتگرال گرفتن از v به x. تعبیر فیزیکی انتگرال هر تابع با استدلال مطرح شده برای تعبیر فیزیکی مشتق توصیف می‌شود.